ÉLÉMENTS MATHÉMATIQUES

Sommaire

Mis à jour le 01/2013

I. Opérateurs

A. Notation symbolique nabla

1. Le nabla

Les opérateurs peuvent être notés de façon symbolique en utilisant le nabla $\vec{\nabla}$

2. Les opérateurs

a. Avec un seul nabla (dérivées premières)

nom	agit sur	donne un		
gradient	scalaire f	vecteur	$\overrightarrow{grad}(f)$	$\vec{\nabla} f$
divergence	vecteur $\vec{A}$	scalaire	$div(\vec{A})$	$\vec{\nabla}\vec{A}$
rotationnel	vecteur $\vec{A}$	vecteur	$\overrightarrow{rot}(\vec{A})$	$\vec{\nabla}\wedge\vec{A}$

b. Laplacien (nabla au carré: dérivées secondes)

On utilise ici les techniques habituelles en traitant en quelque sorte le nabla comme un vecteur habituel...quoique ce vecteur doive agir sur quelque chose derrière lui. Il ne s'agit pas dans la suite de démonstration véritable.

nom	agit sur	donne un		
laplacien scalaire	scalaire f	scalaire	Δf	$= \vec{\nabla}^2 f$ $= (\vec{\nabla}\vec{\nabla}) f$ or $(\vec{a}\vec{b})k=\vec{a}(\vec{b}k)$ $= \vec{\nabla}(\vec{\nabla} f)$ $= div(\overrightarrow{grad}(f))$
laplacien vectoriel	vecteur $\vec{A}$	vecteur	$\Delta\vec{A}$	$= \vec{\nabla}^2\vec{A}$ $= (\vec{\nabla}\vec{\nabla})\vec{A}$ ici $(\vec{a}\vec{b})\vec{c}\neq\vec{a}(\vec{b}\vec{c})$

				mais $\vec{a}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c})=\vec{b}(\vec{c}\,\vec{a})-\vec{c}(\vec{a}\,\vec{b})$ donc $\vec{c}(\vec{a}\,\vec{b})=\vec{b}(\vec{c}\,\vec{a})-\vec{a}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c})$ ou $(\vec{a}\,\vec{b})\vec{c}=\vec{b}(\vec{a}\,\vec{c})-\vec{a}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c})$ $= \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{A})-\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{A})$ $= \overrightarrow{grad}\,(div(\vec{A}))-\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}(\vec{A}))$

3. Des formules avec deux nablas

Toujours en utilisant les techniques habituelles des vecteurs. Il ne s'agit toujours pas de démonstration véritable.

nom	**agit sur**	
rotationnel de gradient	scalaire f	$= \vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}f)$ or $\vec{a}\wedge(\vec{b}\,k)=(\vec{a}\wedge\vec{b})k$ donc $\vec{a}\wedge(\vec{a}\,k)=(\vec{a}\wedge\vec{a})k=\vec{0}$ $= (\vec{\nabla}\wedge\vec{\nabla})f$ $= \vec{0}$
divergence de rotationnel	vecteur $\vec{A}$	$= \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\wedge\vec{A})$ or $\vec{a}(\vec{a}\wedge\vec{b})=0$ $= 0$

B. Expression des opérateurs en cartésiennes

1. Le nabla

Dans ce seul cas, on peut attribuer au nabla une écriture formelle:

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{u}_x+\frac{\partial}{\partial y}\vec{u}_y+\frac{\partial}{\partial z}\vec{u}_z\right)$$

2. Les opérateurs

a. Avec un seul nabla

$$div(\vec{A}) = \vec{\nabla}\vec{A}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{u}_x+\frac{\partial}{\partial y}\vec{u}_y+\frac{\partial}{\partial z}\vec{u}_z\right) \cdot \left(A_x\vec{u}_x+A_y\vec{u}_y+A_z\vec{u}_z\right)$$

$$= \frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{rot}(\vec{A}) = \vec{\nabla}\wedge\vec{A}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{u}_x+\frac{\partial}{\partial y}\vec{u}_y+\frac{\partial}{\partial z}\vec{u}_z\right) \wedge \left(A_x\vec{u}_x+A_y\vec{u}_y+A_z\vec{u}_z\right)$$

$$= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{u}_x+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{u}_y+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{u}_z$$

$$\overrightarrow{grad}(f) = \vec{\nabla} f$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{u}_x+\frac{\partial}{\partial y}\vec{u}_y+\frac{\partial}{\partial z}\vec{u}_z\right) f$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{u}_x+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{u}_y+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z\right)$$

b. Laplacien

De façon symbolique

$$\Delta = \vec{\nabla}^2$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{u}_x+\frac{\partial}{\partial y}\vec{u}_y+\frac{\partial}{\partial z}\vec{u}_z\right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{u}_x+\frac{\partial}{\partial y}\vec{u}_y+\frac{\partial}{\partial z}\vec{u}_z\right)$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

d'où pour le laplacien scalaire

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

d'où pour le laplacien vectoriel

$$\Delta \vec{A} = \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial z^2}$$

ou $$= \Delta A_x\,\vec{u}_x+\Delta A_y\,\vec{u}_y+\Delta A_z\,\vec{u}_z$$

$$\left(\Delta A_x = \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \right)$$

3. Des formules avec deux nablas

$$div(\overrightarrow{grad}(f)) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{u}_x+\frac{\partial}{\partial y}\vec{u}_y+\frac{\partial}{\partial z}\vec{u}_z\right) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{u}_x+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{u}_y+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z\right)$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}(f))=\vec{0} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{u}_x+\frac{\partial}{\partial y}\vec{u}_y+\frac{\partial}{\partial z}\vec{u}_z\right) \wedge \left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{u}_x+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{u}_y+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z\right)$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}\right)\vec{u}_x+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\right)\vec{u}_y+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)\vec{u}_z$$

$$= \vec{0}$$

$$div(\overrightarrow{rot}(\vec{A}))=\vec{0}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{u}_x+\frac{\partial}{\partial y}\vec{u}_y+\frac{\partial}{\partial z}\vec{u}_z\right) \cdot \left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{u}_x+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{u}_y+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{u}_z$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\right)+\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\right)+\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\right)$$

$$= \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 A_z}{\partial y\partial x}\right)+\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 A_x}{\partial z\partial y}\right)+\left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 A_y}{\partial x\partial z}\right)$$

$$= 0$$

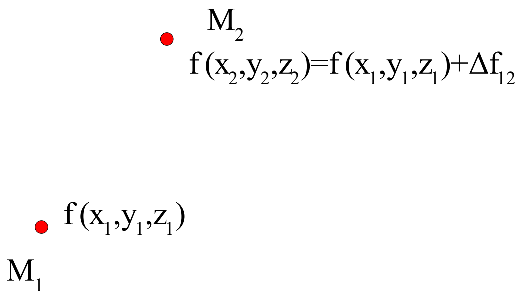
C. Définition des opérateurs

1. Gradient

a. Variation spatiale d'une fonction de point entre deux points

On considère la fonction de point $f(M)$ prenant une valeur en chaque point (champ scalaire). On note en cartésiennes: $f(x,y,z)$. Cette fonction varie donc **graduellement** si on se déplace dans l'espace.

a.1. Variation finie



De M_1 à M_2 , la fonction varie graduellement. La variation totale est notée:

$$\Delta f_{12}=f(x_{2,}y_{2,}z_2)-f(x_{1,}y_{1,}z_1)$$

a.2. Variation élémentaire

Dans le cas d'un déplacement infiniment « petit » dit élémentaire, on note df la variation élémentaire de f (on suppose que x a varié d'un infiniment petit dx , y a varié d'un infiniment petit dy , z a varié d'un infiniment petit dz). df est différentielle d'une fonction de plusieurs variables.

$$d\,f=f(x+dx\,,y+dy\,,z+dz)-f(x\,,y\,,z)$$

b. Formule donnant la variation spatiale d'une fonction de point

b.1. Variation finie

$$\Delta f_{12}=f(x_{2,}y_{2,}z_2)-f(x_{1,}y_{1,}z_1)$$

Si la fonction ne dépendait que de x , on pourrait écrire en utilisant le développement d'une fonction d'une variable:

$$\Delta f_{12}=f(x_2)-f(x_1)$$

$$\Delta f_{12}=\left(\frac{df}{dx}\right)_{x_1}\frac{(x_2-x_1)}{1!}+\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_{x_1}\frac{(x_2-x_1)^2}{2!}+...$$

$$\Delta f_{12}=\left(\frac{df}{dx}\right)_{x_1}\frac{\Delta x}{1!}+\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_{x_1}\frac{\Delta x^2}{2!}+...$$

Si la fonction dépend de $x\,,y\,,z$, on écrira en utilisant le développement d'une fonction de plusieurs variables:

$$\Delta f_{12}=f(x_{2,}y_{2,}z_2)-f(x_{1,}y_{1,}z_1)$$

$$\Delta f_{12}=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{M_1}(x_2-x_1)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{M_1}(y_2-y_1)+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{M_1}(z_2-z_1)$$

$$+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{M_1}\frac{(x_2-x_1)^2}{2!}+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{M_1}\frac{(y_2-y_1)^2}{2!}+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)_{M_1}\frac{(z_2-z_1)^2}{2!}$$

$$+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)_{M_1}(x_2-x_1)(y_2-y_1)+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}\right)_{M_1}(y_2-y_1)(z_2-z_1)+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x}\right)_{M_1}(z_2-z_1)(x_2-x_1)+...$$

$$\Delta f_{12} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{M_1} \Delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{M_1} \Delta y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{M_1} \Delta z$$
$$+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{M_1} \frac{\Delta x^2}{2!} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{M_1} \frac{\Delta y^2}{2!} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)_{M_1} \frac{\Delta z^2}{2!}$$
$$+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{M_1} \Delta x \Delta y + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\right)_{M_1} \Delta y \Delta z + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}\right)_{M_1} \Delta z \Delta x + \ldots$$

b.2. Variation élémentaire

Dans le cas d'un déplacement « petit », pour une fonction d'une variable x , on pourra écrire approximativement en se limitant au premier ordre:

$$\Delta f_{12} \approx \left(\frac{df}{dx}\right)_{x_1} \frac{\Delta x}{1!}$$

on retrouve que lorsque l'on travaille au premier ordre, la relation est celle obtenue en utilisant le calcul mathématique différentiel

$$d\,f = \left(\frac{df}{dx}\right) dx$$

où le physicien désigne par df la variation élémentaire de f (on suppose que x a varié d'un infiniment petit dx). La relation entre df et dx est ici une véritable égalité.

Pour une fonction des trois variables x, y, z , dans le cas d'un déplacement « petit », on pourra écrire approximativement en se limitant au premier ordre:

$$\Delta f_{12} \approx \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{M_1} \Delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{M_1} \Delta y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{M_1} \Delta z$$

on retrouve que lorsque l'on travaille au premier ordre, la relation est celle obtenue en utilisant le calcul mathématique différentiel (différentielle d'une fonction de plusieurs variables)

$$d\,f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) dz$$

où le physicien désigne par df la variation élémentaire de f (on suppose que x , y et z ont varié de dx , dy , dz). La relation entre df et dx , dy , dz est ici une véritable égalité.

c. Définition du gradient

On trouve alors que la variation élémentaire de f s'obtient en faisant le produit scalaire du déplacement élémentaire $\vec{dl} = dx\,\vec{u}_x + dy\,\vec{u}_y + dz\,\vec{u}_z$ par le vecteur $\overrightarrow{grad}\,f$ écrit ici en coordonnées cartésiennes $\overrightarrow{grad}\,f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\vec{u}_x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\vec{u}_y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\vec{u}_z$.

En résumé, on a montré que :

$$\Delta f_{12}=(\overrightarrow{grad}\ f)_{M_1}\overrightarrow{\Delta l}+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{M_1}\frac{\Delta x^2}{2!}+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{M_1}\frac{\Delta y^2}{2!}+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)_{M_1}\frac{\Delta z^2}{2!}$$
$$+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)_{M_1}\Delta x\Delta y+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\right)_{M_1}\Delta y\Delta z+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}\right)_{M_1}\Delta z\Delta x+...$$

et donc :

Pour un déplacement élémentaire :

$$\boxed{df=\overrightarrow{grad}\ f\,.\,\overrightarrow{dl}}$$

cette dernière formule donne la définition du gradient d'une fonction de point.

Pour un déplacement fini :

$$\boxed{\Delta f=\int_A^B \overrightarrow{grad}\ f\,.\,\overrightarrow{dl}=\int_A^B df=f(B)-f(A)}$$

La circulation d'un gradient entre deux points A et B donne la variation globale de f de A à B et ne dépend donc pas de la courbe suivie ni de la loi de déplacement sur cette courbe.

d. Propriétés du gradient

1) Le gradient est perpendiculaire aux surfaces équipotentielles (surfaces équi-f).

Démonstration: on suppose un $\vec{dl}$ tel que $df=0$ (équipotentielle) donc, condition suffisante, $\overrightarrow{grad}\ f\perp\overrightarrow{dl}$

2) Le gradient indique la direction et le sens dans lequel il faut se déplacer pour que f augmente le plus fort.

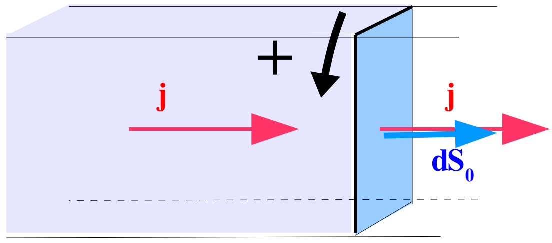
Démonstration: on suppose $\|\vec{dl}\|$ fixé. Si $\vec{dl}$ est selon $\overrightarrow{grad}\,f$, d'une part df est positif et d'autre part puisque le cosinus de l'angle entre $\overrightarrow{grad}\ f$ et $\overrightarrow{dl}$ est maximal, df est alors maximal.

2. Divergence

a. Notion de flux d'un vecteur à travers une surface

On considère le vecteur $\vec{j}(M)$ prenant une valeur en chaque point (champ vectoriel). On imagine ici que ce vecteur correspond à une densité de courant d'une grandeur physique en volume . Par exemple, un courant massique en mécanique des fluides (en $kg\,s^{-1}m^{-2}$), un courant de charges en électricité (en $C\,s^{-1}m^{-2}$ c'est à dire en $A\,m^{-2}$), un courant d'énergie par exemple en thermique ou en électromagnétisme (en $J\,s^{-1}m^{-2}$ c'est à dire en $W\,m^{-2}$)...etc

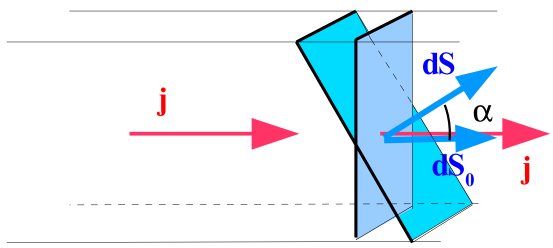
a.1. Flux élémentaire (à travers une surface ouverte élémentaire)



Le schéma symbolise un tube de champ élémentaire (la représentation est obligatoirement celle d'un tube de champ fini), parcouru par un courant $\vec{j}=j\vec{u}$ ($\vec{u}$: vecteur unitaire). On veut déterminer le flux qui traverse la surface élémentaire dS_0 de la gauche vers la droite, la surface ici est particulière car elle coupe le tube de champ perpendiculairement.

On imagine à nouveau un courant massique dans cet exemple en $kg\,s^{-1}m^{-2}$. Le flux élémentaire $d\Phi$ à travers dS_0 correspond au débit massique élémentaire en $kg\,s^{-1}$. On a ici, puisque au niveau de ce tube élémentaire, $\vec{j}$ est considéré comme uniforme :

$$d\Phi=j\,dS_0$$



La surface dS ne coupe pas le tube perpendiculairement. Le flux qui traverse la surface élémentaire dS de la gauche vers la droite est le même que le flux qui traverse dS_0 puisque l'on a coupé le même tube de champ.

$d\Phi=j\,dS_0$

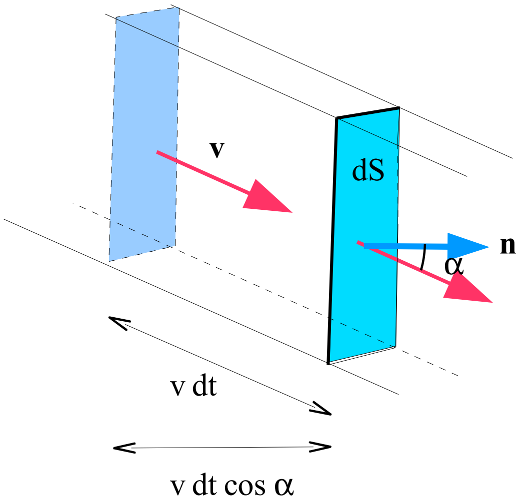
Soit en fonction de dS

$d\Phi=j\,dS\cos\alpha$

$$\boxed{d\Phi=\vec{j}\,\vec{dS}}$$

a.2. Flux élémentaire (deuxième approche)

On reprend l'exemple du courant de masse. On suppose que cet écoulement est celui d'un fluide de masse volumique ρ , de vitesse, à l'instant considéré $\vec{v}$. On veut, afin de retrouver le résultat précédent, déterminer la masse de fluide qui traverse la section dS pendant dt . On suppose, à nouveau, que l'écoulement est incliné d'un angle α par rapport à la normale à la surface dS .



La masse qui traverse la surface élémentaire dS pendant la durée élémentaire dt est ici notée $d^2 m$. On veut symboliser par là que cette masse est doublement élémentaire (surface élémentaire, durée élémentaire).

Cette masse est celle qui est contenue dans le parallélépipède de surface de base dS et de hauteur $v\cos\alpha\, dt$ c'est-à-dire dans le volume $d^2\tau = v\cos\alpha\, dt\, dS$. La masse élémentaire est donc $d^2 m = \rho\, v\cos\alpha\, dt\, dS$.

Le débit massique élémentaire à travers dS est $d\Phi$, il est tel que $d^2 m = d\Phi\, dt$ et vaut : $d\Phi = \rho\, v\cos\alpha\, dS$.

Finalement, en désignant par $\vec{j} = \rho\vec{v}$ la densité de courant volumique, on retrouve l'expression du flux élémentaire sous forme d'un produit scalaire:

$$\boxed{d\Phi = \vec{j}\,\vec{dS}}$$

avec

$$\boxed{\vec{j} = \rho\vec{v}}$$

a.3. Flux à travers une surface fermée

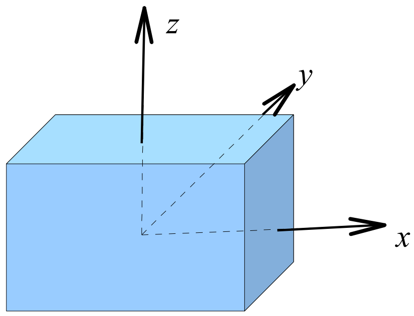
Le flux à travers une surface fermée est obtenu en sommant les contributions dues à tous les éléments de surface. Par convention, les $\vec{dS}$ sont orientés vers l'extérieur de la surface, de sorte que le flux est en convention « sortant » (un flux « sortant » positif est réellement sortant alors qu'un flux « sortant » négatif est en réalité entrant).

$$\boxed{\Phi = \oint\!\!\oint_{\Sigma} \vec{j}\,\vec{dS}}$$

b. Formule donnant le flux à travers une surface fermée

On note en cartésiennes: $\vec{j}(x,y,z) = j_x(x,y,z)\vec{u_x} + j_y(x,y,z)\vec{u_y} + j_z(x,y,z)\vec{u_z}$.

b.1. Flux à travers un parallélépipède



$x_C - \Delta x/2 \qquad x_C \qquad x_C + \Delta x/2$

Le centre du parallélépipède est en x_C, y_C, z_C . Ses côtés sont $\Delta x, \Delta y, \Delta z$.

Le flux est (la normale aux faces est toujours orientée vers l'extérieur) :

$$\Phi = \iint_{y_C-\frac{\Delta y}{2},\, z_C-\frac{\Delta z}{2}}^{y_C+\frac{\Delta y}{2},\, z_C+\frac{\Delta z}{2}} j_x\left(x_C+\frac{\Delta x}{2}, y, z\right) dy\, dz - \iint_{y_C-\frac{\Delta y}{2},\, z_C-\frac{\Delta z}{2}}^{y_C+\frac{\Delta y}{2},\, z_C+\frac{\Delta z}{2}} j_x\left(x_C-\frac{\Delta x}{2}, y, z\right) dy\, dz$$
$$+ \iint_{z_C-\frac{\Delta z}{2},\, x_C-\frac{\Delta x}{2}}^{z_C+\frac{\Delta z}{2},\, x_C+\frac{\Delta x}{2}} j_y\left(x, y_C+\frac{\Delta y}{2}, z\right) dz\, dx - \iint_{z_C-\frac{\Delta z}{2},\, x_C-\frac{\Delta x}{2}}^{z_C+\frac{\Delta z}{2},\, x_C+\frac{\Delta x}{2}} j_y\left(x, y_C-\frac{\Delta y}{2}, z\right) dz\, dx$$
$$+ \iint_{x_C-\frac{\Delta x}{2},\, y_C-\frac{\Delta y}{2}}^{x_C+\frac{\Delta x}{2},\, y_C+\frac{\Delta y}{2}} j_z\left(x, y, z_C+\frac{\Delta z}{2}\right) dx\, dy - \iint_{x_C-\frac{\Delta x}{2},\, y_C-\frac{\Delta y}{2}}^{x_C+\frac{\Delta x}{2},\, y_C+\frac{\Delta y}{2}} j_z\left(x, y, z_C-\frac{\Delta z}{2}\right) dx\, dy$$

Dans la suite, on suppose un parallélépipède « petit » et on va se limiter aux termes du premier ordre en $\Delta x, \Delta y, \Delta z$.

Par exemple, pour la première face étudiée :

$$j_x\left(x_C+\frac{\Delta x}{2}, y, z\right) = j_x\left(x_C+\frac{\Delta x}{2}, y_C, z_C\right) + (y-y_C)\left(\frac{\partial j_x}{\partial y}\right)_{x_C+\frac{\Delta x}{2},\, y_C,\, z_C} + (z-z_C)\left(\frac{\partial j_x}{\partial z}\right)_{x_C+\frac{\Delta x}{2},\, y_C,\, z_C} + \ldots$$

donc :

$$\iint_{y_C-\frac{\Delta y}{2},\, z_C-\frac{\Delta z}{2}}^{y_C+\frac{\Delta y}{2},\, z_C+\frac{\Delta z}{2}} j_x\left(x_C+\frac{\Delta x}{2}, y, z\right) dy\, dz = \iint_{y_C-\frac{\Delta y}{2},\, z_C-\frac{\Delta z}{2}}^{y_C+\frac{\Delta y}{2},\, z_C+\frac{\Delta z}{2}} j_x\left(x_C+\frac{\Delta x}{2}, y_C, z_C\right) dy\, dz$$
$$+ \iint_{y_C-\frac{\Delta y}{2},\, z_C-\frac{\Delta z}{2}}^{y_C+\frac{\Delta y}{2},\, z_C+\frac{\Delta z}{2}} \left((y-y_C)\left(\frac{\partial j_x}{\partial y}\right)_{x_C+\frac{\Delta x}{2},\, y_C,\, z_C} + (z-z_C)\left(\frac{\partial j_x}{\partial z}\right)_{x_C+\frac{\Delta x}{2},\, y_C,\, z_C} + \ldots \right) dy\, dz$$

$$\iint_{y_C-\frac{\Delta y}{2}, z_C-\frac{\Delta z}{2}}^{y_C+\frac{\Delta y}{2}, z_C+\frac{\Delta z}{2}} j_x(x_C+\frac{\Delta x}{2}, y, z)\, dy\, dz = j_x(x_C+\frac{\Delta x}{2}, y_C, z_C)\Delta y \Delta z$$

$$+\left(\frac{\partial j_x}{\partial y}\right)_{x_C+\frac{\Delta x}{2}, y_C, z_C} \iint_{y_C-\frac{\Delta y}{2}, z_C-\frac{\Delta z}{2}}^{y_C+\frac{\Delta y}{2}, z_C+\frac{\Delta z}{2}} (y-y_C)\, dy\, dz + \left(\frac{\partial j_x}{\partial z}\right)_{x_C+\frac{\Delta x}{2}, y_C, z_C} \iint_{y_C-\frac{\Delta y}{2}, z_C-\frac{\Delta z}{2}}^{y_C+\frac{\Delta y}{2}, z_C+\frac{\Delta z}{2}} (z-z_C)\, dy\, dz$$

Puisque les deux dernières intégrales sont nulles chacune, on obtient au degré d'approximation choisi le résultat :

$$\iint_{y_C-\frac{\Delta y}{2}, z_C-\frac{\Delta z}{2}}^{y_C+\frac{\Delta y}{2}, z_C+\frac{\Delta z}{2}} j_x(x_C+\frac{\Delta x}{2}, y, z)\, dy\, dz \approx j_x(x_C+\frac{\Delta x}{2}, y_C, z_C)\Delta y \Delta z$$

et donc le début du développement du flux est le suivant, conformément à l'intuition:

$$\begin{aligned}\Phi = {} & j_x(x_C+\frac{\Delta x}{2}, y_C, z_C)\Delta y \Delta z - j_x(x_C-\frac{\Delta x}{2}, y_C, z_C)\Delta y \Delta z \\ & + j_y(x_C, y_C+\frac{\Delta y}{2}, z)\Delta z \Delta x - j_y(x_C, y_C-\frac{\Delta y}{2}, z)\Delta z \Delta x \\ & + j_z(x_C, y_C, z_C+\frac{\Delta z}{2})\Delta x \Delta y - j_z(x_C, y_C, z_C-\frac{\Delta z}{2})\Delta x \Delta y + \ldots\end{aligned}$$

<u>b.2. Flux à travers un parallélépipède élémentaire</u>

On peut poursuivre encore le calcul approché :

$$j_x(x_C+\frac{\Delta x}{2}, y_C, z_C) = j_x(x_C, y_C, z_C) + \frac{\Delta x}{2}\left(\frac{\partial j_x}{\partial x}\right)_{x_C, y_C, z_C} + \ldots$$

$$j_x(x_C-\frac{\Delta x}{2}, y_C, z_C) = j_x(x_C, y_C, z_C) - \frac{\Delta x}{2}\left(\frac{\partial j_x}{\partial x}\right)_{x_C, y_C, z_C} + \ldots$$

finalement :

$$j_x(x_C+\frac{\Delta x}{2}, y_C, z_C) - j_x(x_C-\frac{\Delta x}{2}, y_C, z_C) = \left(\frac{\partial j_x}{\partial x}\right)_{x_C, y_C, z_C}\Delta x + \ldots$$

$$\Phi = \left(\frac{\partial j_x}{\partial x}\right)_{x_C, y_C, z_C}\Delta x \quad \Delta y \Delta z + \left(\frac{\partial j_y}{\partial y}\right)_{x_C, y_C, z_C}\Delta y \quad \Delta z \Delta x + \left(\frac{\partial j_z}{\partial z}\right)_{x_C, y_C, z_C}\Delta z \quad \Delta x \Delta y + \ldots$$

Pour un parallélépipède élémentaire en x, y, z , on obtiendra :

$$d\Phi = \left(\left(\frac{\partial j_x}{\partial x}\right)_{x,y,z} + \left(\frac{\partial j_y}{\partial y}\right)_{x,y,z} + \left(\frac{\partial j_z}{\partial z}\right)_{x,y,z}\right) dx\, dy\, dz$$

c. Définition de la divergence

On trouve alors que le flux élémentaire à travers une surface fermée élémentaire s'obtient en faisant le produit du volume élémentaire $d\tau = dx\,dy\,dz$ par le scalaire $div\,\vec{j}$ écrit ici en coordonnées cartésiennes $div\,\vec{j} = \left(\frac{\partial j_x}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial j_y}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial j_z}{\partial z}\right)$.

Pour une surface élémentaire fermée entourant un volume élémentaire $d\tau$:

$$\boxed{d\Phi_{surface\ élémentaire\ fermée} = div\,\vec{j}.\,d\tau}$$

cette dernière formule donne la définition de la divergence d'un vecteur.

La divergence d'un champ vectoriel en un point est égale au flux sortant par unité de volume.

Pour une surface finie fermée Σ entourant un volume fini V , on utilisera le théorème d'OSTROGRADSKY :

Le flux d'un champ vectoriel $\vec{j}$ sortant d'une surface fermée Σ est égal à l'intégrale de sa divergence, étendue au volume V délimité par Σ .

$$\boxed{\Phi = \oiint_{\Sigma} \vec{j}\,\vec{dS} = \iiint_{V} div\,\vec{j}.\,d\tau}$$

d. Propriétés de la divergence

1) Le signe de la divergence en un point:

-si le champ vectoriel diverge (présence d'une source ou diminution de la densité volumique de la grandeur dont on étudie le courant), la divergence au point étudié est positive

-si le champ vectoriel converge (présence d'une source négative -puits- ou augmentation de la densité volumique de la grandeur dont on étudie le courant), la divergence au point étudié est négative

-si la divergence est nulle, le flux est localement conservatif.

2) Un champ à flux conservatif et à symétrie sphérique sera en $\frac{1}{r^2}\vec{u_r}$, en lien avec le fait que la surface d'une sphère varie en r^2 .

3) Un champ à flux conservatif et à symétrie cylindrique sera en $\frac{1}{r}\vec{u_r}$, en lien avec le fait que la surface d'un cylindre varie en r^1 .

3. Rotationnel

a. Notion de circulation d'un vecteur le long d'une courbe fermée

On considère le vecteur $\vec{v}(M)$ prenant une valeur en chaque point (exemple, vitesse du fluide en mécanique des fluides).

On prend la composante tangentielle du vecteur le long d'une courbe fermée (Γ) et on calcule l'intégrale $\mathscr{C}$ de cette composante le long de la courbe.

$$\mathscr{C}=\oint_{\Gamma} v(M)_{tangentiel}\,dl$$

(On remarque que le résultat donnera v tangentiel moyen le long de cette courbe multiplié par la longueur totale de la courbe. Dans le cas d'un vecteur vitesse et d'un fluide de masse volumique constant, cette intégrale est proportionnelle à la quantité de mouvement totale du fluide projetée sur le contour. Si elle est positive, le fluide va pouvoir circuler dans le sens positif comme dans un mini tuyau -si on lui interdit tout autre mouvement-. Si elle est nulle, le fluide restera immobile sans circuler puisque il y a autant de quantité de mouvement tangentielle dans un sens que de quantité de mouvement tangentielle dans l'autre sens.)

$$\mathscr{C}=\oint_{\Gamma} (\vec{v}(M)\vec{u}_{tangentiel})\,dl$$

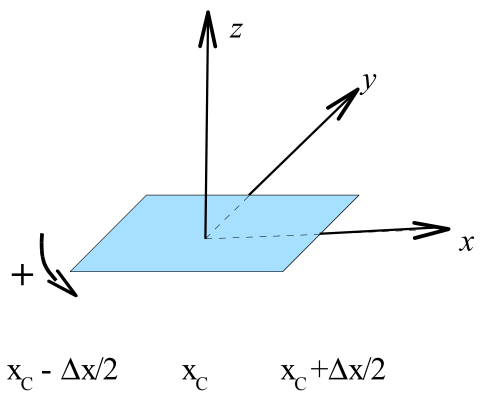
$$\mathscr{C}=\oint_{\Gamma} \vec{v}(M)(\vec{u}_{tangentiel}\,dl)$$

$$\boxed{\mathscr{C}=\oint_{\Gamma} \vec{v}(M)\,\vec{dl}}$$

b. Formule donnant la circulation le long d'une courbe fermée

On note en cartésiennes : $\vec{v}(x,y,z)=v_x(x,y,z)\vec{u}_x+v_y(x,y,z)\vec{u}_y+v_z(x,y,z)\vec{u}_z$

<u>b.1.Circulation le long d'un rectangle situé dans un plan *z* constant</u>



Le centre du rectangle est en x_C, y_C, z_C . Ses côtés sont $\Delta x, \Delta y$.

Le sens positif (choisi arbitrairement pour calculer la circulation) est le sens correspondant à l'axe z .

$$\mathscr{C}_z = \int_{x_C-\frac{\Delta x}{2}}^{x_C+\frac{\Delta x}{2}} v_x(x, y_C-\frac{\Delta y}{2}, z_C)\,dx + \int_{y_C-\frac{\Delta y}{2}}^{y_C+\frac{\Delta y}{2}} v_y(x_C+\frac{\Delta x}{2}, y, z_C)\,dy$$
$$- \int_{x_C-\frac{\Delta x}{2}}^{x_C+\frac{\Delta x}{2}} v_x(x, y_C+\frac{\Delta y}{2}, z_C)\,dx - \int_{y_C-\frac{\Delta y}{2}}^{y_C+\frac{\Delta y}{2}} v_y(x_C-\frac{\Delta x}{2}, y, z_C)\,dy$$

$$\mathscr{C}_z = \int_{x_C-\frac{\Delta x}{2}}^{x_C+\frac{\Delta x}{2}} v_x(x, y_C-\frac{\Delta y}{2}, z_C)\,dx + \int_{y_C-\frac{\Delta y}{2}}^{y_C+\frac{\Delta y}{2}} v_y(x_C+\frac{\Delta x}{2}, y, z_C)\,dy$$
$$+ \int_{x_C+\frac{\Delta x}{2}}^{x_C-\frac{\Delta x}{2}} v_x(x, y_C+\frac{\Delta y}{2}, z_C)\,dx + \int_{y_C+\frac{\Delta y}{2}}^{y_C-\frac{\Delta y}{2}} v_y(x_C-\frac{\Delta x}{2}, y, z_C)\,dy$$

Dans la suite, on suppose un rectangle « petit » et on va se limiter aux termes du premier ordre en $\Delta x, \Delta y, \Delta z$.

Par exemple, pour le premier côté étudié:

$$v_x(x, y_C-\frac{\Delta y}{2}, z_C) = v_x(x_C, y_C-\frac{\Delta y}{2}, z_C) + (x-x_C)\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)_{x_C, y_C-\frac{\Delta y}{2}, z_C} + \ldots$$

donc :

$$\int_{x_C-\frac{\Delta x}{2}}^{x_C+\frac{\Delta x}{2}} v_x(x, y_C-\frac{\Delta y}{2}, z_C)\,dx = \int_{x_C-\frac{\Delta x}{2}}^{x_C+\frac{\Delta x}{2}} v_x(x_C, y_C-\frac{\Delta y}{2}, z_C)\,dx + \int_{x_C-\frac{\Delta x}{2}}^{x_C+\frac{\Delta x}{2}} (x-x_C)\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)_{x_C, y_C-\frac{\Delta y}{2}, z_C} dx + \ldots$$

$$\int_{x_C-\frac{\Delta x}{2}}^{x_C+\frac{\Delta x}{2}} v_x(x, y_C-\frac{\Delta y}{2}, z_C)\,dx = v_x(x_C, y_C-\frac{\Delta y}{2}, z_C)\,\Delta x + \left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)_{x_C, y_C-\frac{\Delta y}{2}, z_C} \int_{x_C-\frac{\Delta x}{2}}^{x_C+\frac{\Delta x}{2}} (x-x_C)\,dx + \ldots$$

La dernière intégrale est nulle, on obtient au degré d'approximation choisi le résultat :

$$\int_{x_C-\frac{\Delta x}{2}}^{x_C+\frac{\Delta x}{2}} v_x(x, y_C-\frac{\Delta y}{2}, z_C)\,dx \approx v_x(x_C, y_C-\frac{\Delta y}{2}, z_C)\,\Delta x$$

et donc le début du développement de la circulation est le suivant, conformément à l'intuition:

$$\mathscr{C}_z = v_x(x_C, y_C-\frac{\Delta y}{2}, z_C)\,\Delta x + v_y(x_C+\frac{\Delta x}{2}, y_C, z_C)\,\Delta y$$
$$- v_x(x_C, y_C+\frac{\Delta y}{2}, z_C)\,\Delta x - v_y(x_C-\frac{\Delta x}{2}, y_C, z_C)\,\Delta y + \ldots$$

<u>b.2.Circulation le long d'un rectangle élémentaire situé dans un plan *z* constant</u>

On peut poursuivre encore le calcul approché :

$$v_x(x_C, y_C+\frac{\Delta y}{2}, z_C)=v_x(x_C, y_C, z_C)+\frac{\Delta y}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{x_C, y_C, z_C}+...$$

$$v_x(x_C, y_C-\frac{\Delta y}{2}, z_C)=v_x(x_C, y_C, z_C)-\frac{\Delta y}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{x_C, y_C, z_C}+...$$

finalement :

$$v_x(x_C, y_C-\frac{\Delta y}{2}, z_C)-v_x(x_C, y_C+\frac{\Delta y}{2}, z_C)=-\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{x_C, y_C, z_C}\Delta y+...$$

$$\mathscr{C}_z=\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)_{x_C, y_C, z_C}\Delta x\Delta y-\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{x_C, y_C, z_C}\Delta y\Delta x+...$$

Pour un rectangle élémentaire en x, y, z , on obtiendra :

$$d\mathscr{C}_z=\left(\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\right)dx\,dy$$

c. Définition du rotationnel

On trouve alors que la circulation élémentaire le long d'un contour élémentaire dans un plan à z constant s'obtient en faisant le produit de la surface élémentaire $dS_z=dx\,dy$ par la composante du rotationnel selon z : $\overrightarrow{rot}\,\vec{v}.\vec{u}_z$ écrite ici en coordonnées cartésiennes.

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{v}.\vec{u}_z=\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$$

Pour obtenir les deux autres coordonnées du rotationnel, on envisage un contour dans le plan yz et un autre dans le plan zx .

Pour un contour élémentaire fermé entourant une surface élémentaire dS perpendiculaire à $\vec{u}$:

$$d\mathscr{C}_{\text{sur contour élémentaire fermé perpendiculaire à }\vec{u}}=(\overrightarrow{rot}\,\vec{v}.\vec{u})\,dS$$

cette dernière formule donne la définition du rotationnel d'un vecteur.

La composante scalaire selon $\vec{u}$ du rotationnel d'un champ vectoriel en un point est égale à la circulation par unité de surface perpendiculaire à $\vec{u}$.

$$\boxed{d\mathscr{C}_{\text{sur contour élémentaire fermé}}=\overrightarrow{rot}\,\vec{v}.\vec{dS}}$$

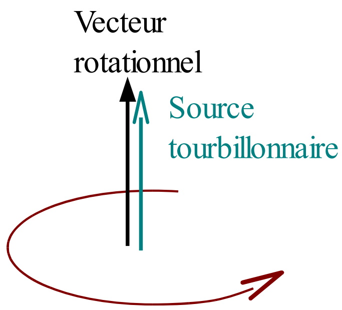
Pour un contour fini fermée Γ entourant une surface ouverte S , on utilisera le théorème de STOKES :

La circulation d'un champ vectoriel $\vec{v}$ le long d'un contour Γ fermé est égal au flux du rotationnel de $\vec{v}$ à travers une surface S s'appuyant sur Γ .

$$\boxed{\mathscr{C} = \oint_{\Gamma} \vec{v}\, \vec{dl} = \iint_{S} \overrightarrow{rot}\, \vec{v} . \vec{dS}}$$

d. Propriétés du rotationnel

En présence d'une source tourbillonnaire, le rotationnel est non nul. Le rotationnel est selon la source de tourbillon.



Si le rotationnel est nul au point étudié, la circulation est localement conservative.

4. Laplacien scalaire

Il s'agit d'un opérateur de dérivées secondes.

a. Écart entre la valeur d'une fonction en un point et la fonction aux points voisins

On étudie le cas d'une fonction d'une variable. On peut comparer la valeur moyenne de la fonction à une distance Δx notée ici R à la valeur de la fonction au point considéré:

$$anomalie = \frac{1}{2}(f(x+R)+f(x-R)) \;-\; f(x)$$

On cherche à exprimer l'anomalie locale donc on choisit un $\Delta x = R$ « petit » puisque on reste au voisinage du point. On travaille au deuxième ordre en R .

$$f(x+R) = f(x) + R f'(x) + \frac{R^2}{2} f''(x) + \dots$$

$$f(x-R) = f(x) - R f'(x) + \frac{R^2}{2} f''(x) + \dots$$

On obtient :

$$anomalie = \frac{1}{2} R^2 f''(x)$$

Le laplacien pour une fonction est $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$. Pour une fonction d'une variable, on a $\Delta f = \dfrac{d^2 f}{d x^2}$. On a obtenu dans le cas d'une fonction d'une variable:

$$\Delta f(x) = anomalie \times \frac{2}{R^2}$$

Pour une fonction de deux variables, le lien entre laplacien et anomalie locale est de la même forme. La valeur moyenne est par exemple celle sur un petit cercle centré sur le point étudié. Pour une fonction de trois variables, la valeur moyenne est par exemple celle sur une petite sphère centrée sur le point étudié.

b. *Sens physique du Laplacien*

Si le laplacien est positif, la fonction au point est inférieure à sa valeur moyenne au voisinage. La fonction est convexe au point.

Si le laplacien est négatif, la fonction au point est supérieure à sa valeur moyenne au voisinage. La fonction est concave au point.

Si le laplacien est nul (fonction dite « harmonique »), l'anomalie locale est nulle et la fonction satisfait le théorème de la moyenne. La fonction est égale à sa valeur moyenne au voisinage. La grandeur physique représentée par f se distribue donc de telle sorte que les variations imposées par les conditions aux limites se répartissent le plus régulièrement possible dans l'espace.

c. *Exemples divers*

En conclusion de cette approche du Laplacien:

1) L'équation de Laplace $\Delta f = 0$ traduit le fait que la solution f est toujours égale à sa moyenne prise sur un voisinage.

2) L'équation de la chaleur de la forme $\dfrac{\partial f}{\partial t} = \alpha^2 \Delta f$ décrit l'évolution d'un champ de température et peut s'interpréter comme le fait que $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ est proportionnel à Δf , c'est à dire à la convexité au point. Ainsi, si f y est inférieur à la moyenne de f dans un voisinage (anomalie positive, fonction convexe), alors la température en ce point va augmenter au cours du temps. Inversement,si f y est supérieur à la moyenne de f dans un voisinage, alors la température en ce point va diminuer au cours du temps.

3) En électrostatique, le laplacien du potentiel est non nul aux seuls endroits où il y a des charges. On peut interpréter cela en disant que seul les endroits où se trouvent les charges électriques induisent finalement des "courbures" marquées au niveau de la fonction potentiel. Les extremums du potentiel se trouvent aux endroits où sont localisées les charges électriques.

4) Le laplacien se voit facilement aussi en considérant l'opérateur $div(\overrightarrow{grad}())$. On peut se représenter un relief terrestre (le gradient du relief représentant la pente). Alors dans le cas d'un creux, le vecteur gradient (de la fonction altitude h d'un point (x, y)) s'écarte des creux tout autour donc $div(\overrightarrow{grad}(h)) > 0$. Dans le cas inverse, celui des sommets, le vecteur gradient converge tout autour et $div(\overrightarrow{grad}(h)) < 0$.

D. Commentaires à propos de deux formules

1. Rotationnel de gradient

a. Approche locale

On a vu précédemment que : $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}(f))=\vec{0}$

b. Approche intégrale ou globale

On a vu dans ce chapitre apparaître deux fois la notion de circulation d'un vecteur :

-circulation entre deux points d'un gradient (la courbe n'est pas obligatoirement fermée). Le résultat ne dépend que du point de départ et du point d'arrivée.

$$\int_A^B \overrightarrow{grad}\, f\,.\vec{d}l = f(B)-f(A)$$

-circulation d'un vecteur quelconque sur une courbe fermée (théorème de STOKES).

$$\oint_\Gamma \vec{v}\,\vec{d}l = \iint_S \overrightarrow{rot}\,\vec{v}\,.\vec{dS}$$

Si on envisage la circulation d'un gradient sur une courbe fermée quelconque, la première formule indique que la circulation est nulle et la deuxième formule permet alors de conclure que $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}(f))=\vec{0}$.

2. Divergence de rotationnel

a. Approche locale

On a vu précédemment que : $div(\overrightarrow{rot}(\vec{A}))=\vec{0}$

b. Approche intégrale ou globale

On a vu dans ce chapitre apparaître deux fois la notion de flux d'un vecteur :

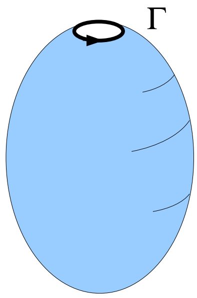
-flux à travers une surface d'un rotationnel (la surface s'appuyant sur un contour et n'est donc pas fermée) (théorème de STOKES). Le résultat ne dépend que du contour sur lequel s'appuie la surface.

$$\iint_S \overrightarrow{rot}\,\vec{v}\,.\vec{dS} = \oint_\Gamma \vec{v}\,\vec{d}l$$

-flux d'un vecteur quelconque à travers une surface fermée (théorème d'OSTROGRADSKY):

$$\oiint_\Sigma \vec{j}\,\vec{dS} = \iiint_V div\,\vec{j}.d\tau$$

Si on envisage le flux d'un rotationnel à travers une surface fermée quelconque, la première formule indique que le flux est nul (il suffit d'envisager un contour Γ tendant vers zéro mais on peut aussi dire sans cela que le flux est le même au signe près pour chacune des deux portions de la surface donc le flux total est nul)



et la deuxième formule permet alors de conclure que $div(\overrightarrow{rot}(\vec{v}))=\vec{0}$