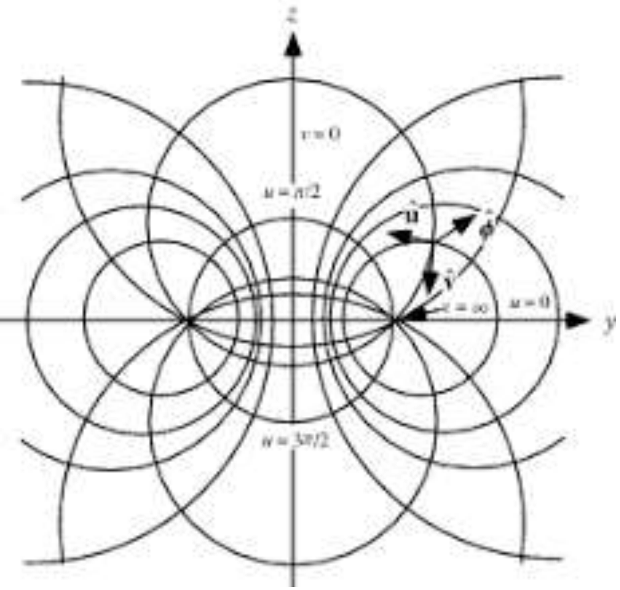
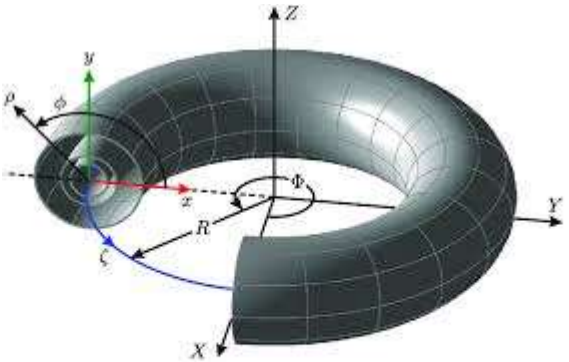
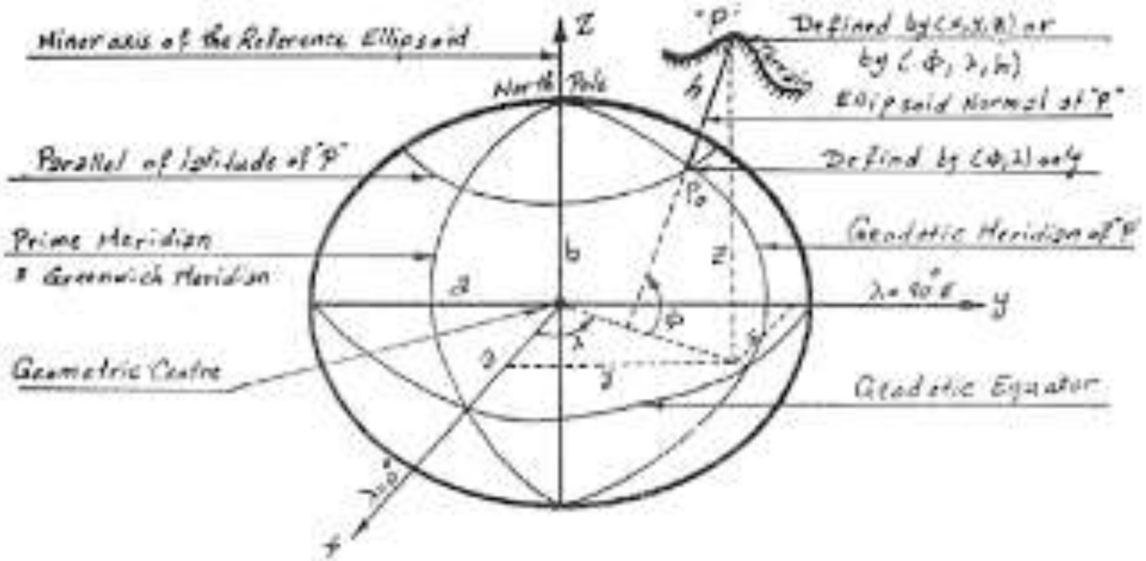
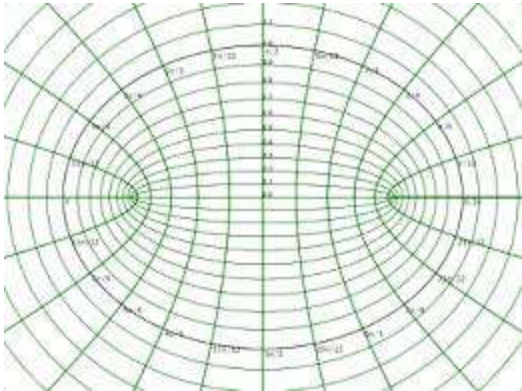




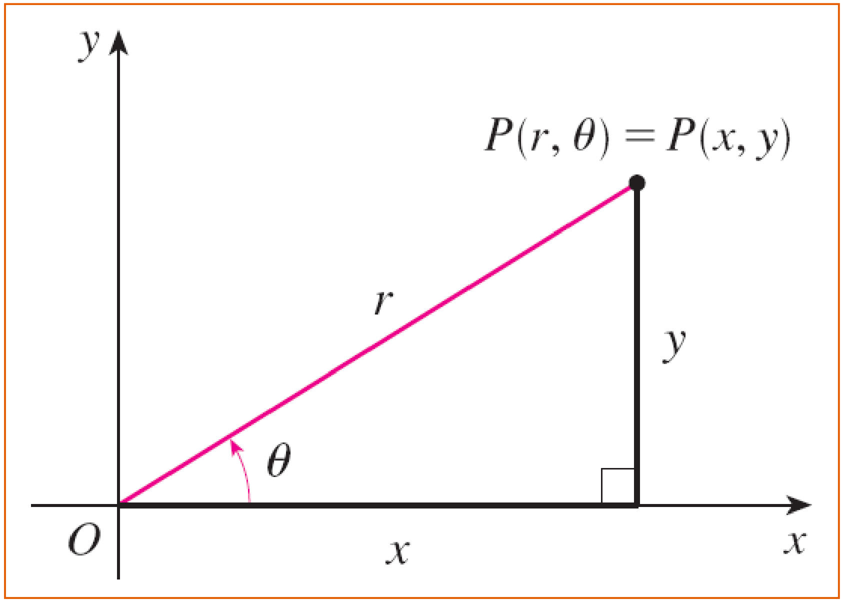
# Coordonnées



## COORDONÉES POLAIRES (rappel)

En géométrie plane, le système de coordonnées polaires est utilisé pour donner une description plus simple de certaines courbes (et surfaces).




La figure nous permet de nous

Souvenir de la relation entre coordonnées polaires et cartésiennes.

- Si le point *P* a (*x*, *y*) pour coordonnées cartésiennes et (*r*, *θ*) comme coordonnées polaires alors

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \tan\theta = y/x$$

## COORDONNÉES CYLINDRIQUES

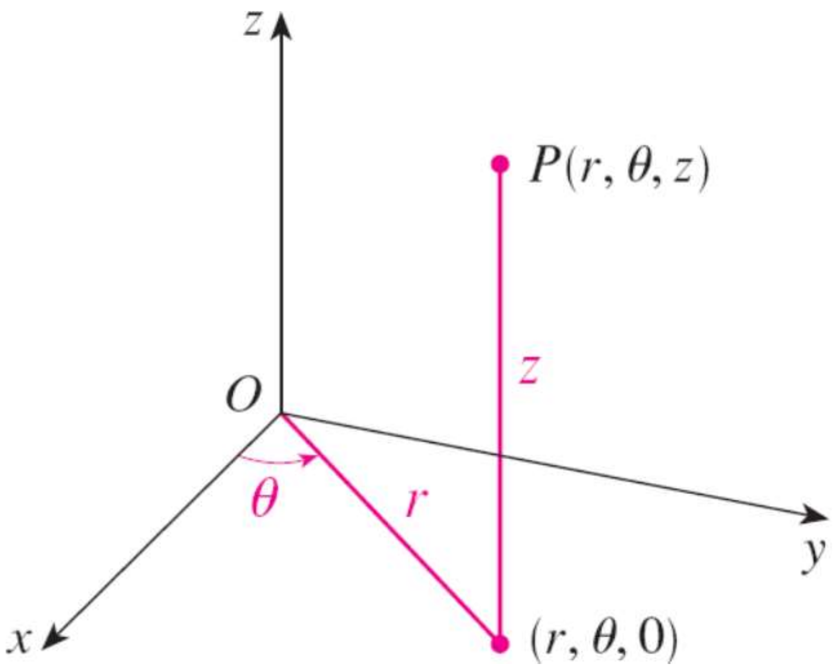
En dimension 3 il y a un système de coordonnées, appelé coordonnées cylindriques, qui :

- Est similaire aux coordonnées polaires.
- Donne une description simple de nombreux domaines (surfaces, volumes).

Dans le système de coordonnées cylindriques, un point *P* de l'espace (3-D) est représenté

Par le triplet ($r$, $\theta$, $z$), où :

$r$ et $\theta$ sont les coordonnées polaires de la projection de *P* sur le plan *xy*, $z$ est la distance orientée du plan *xy* à *P*.



## COORDONNÉES CYLINDRIQUES

Pour convertir des coordonnées cylindriques en cartésiennes, on utilise :

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$z = z$$

Pour convertir des cartésiennes en cylindriques, on utilise:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\tan \theta = y/x$$

$$z = z$$

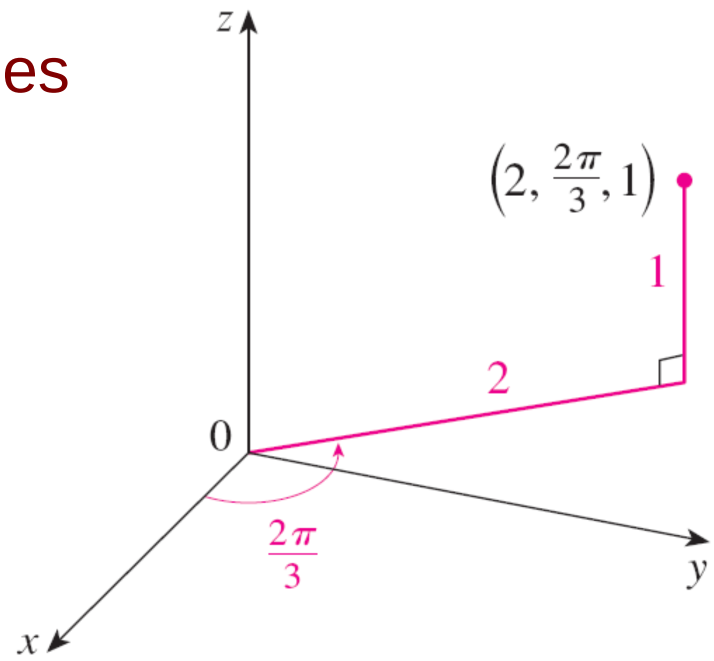
## Exemple

a. Placer le point de coordonnées cylindriques $(2, 2\pi/3, 1)$ et donner ses coordonnées rectangulaires.

b. Donner les coordonnées cylindriques du point de coordonnées rectangulaires $(3, -3, -7)$.

## Solution

a) Le point de cylindriques coordonnées $(2, 2\pi/3, 1)$ est placé sur la figure.




Ses coordonnées rectangulaires sont

$$x = 2\cos\frac{2\pi}{3} = 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

$$y = 2\sin\frac{2\pi}{3} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$$

$$z = 1$$

Le point a donc pour coordonnées rectangulaires $(-1, \sqrt{3}, 1)$.

## Solution (b)

On a :

$$r = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\tan\theta = \frac{-3}{3} = -1, \quad \text{so} \quad \theta = \frac{7\pi}{4} + 2n\pi$$

$$z = -7$$

Un jeu de coordonnées cylindriques est donc :

$$(3\sqrt{2}, -\pi/4, -7)$$

Un autre :

$$(3\sqrt{2}, 7\pi/4, -7)$$

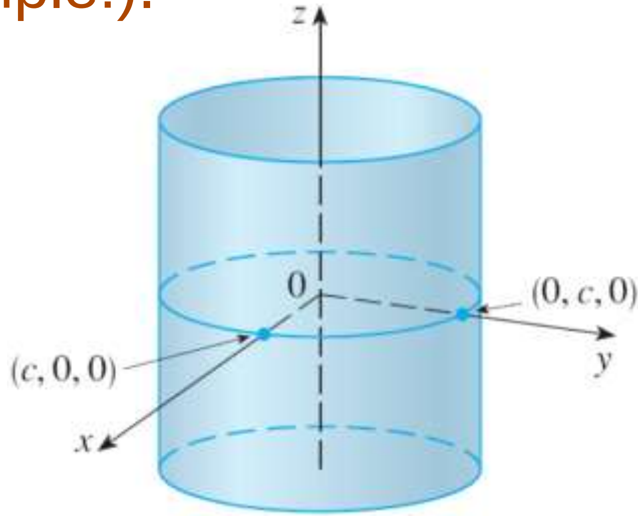
- Comme pour les coordonnées polaires, il y a une infinite de choix possibles.

## Coordonnées cylindriques

Les coordonnées cylindriques sont utiles dans les problèmes où existe une symétrie axiale. On choisit alors l'axe des z de façon à ce qu'il coincide avec cet axe de symétrie.

- Par exemple, pour le cylindre à base circulaire, d'axe $z$, il a pour équation cartésienne $x^2 + y^2 = c^2$.

- En coordonnées cylindriques, ce cylindre a comme équation : $r = c$ (beaucoup plus simple!).



## Exercice

Quelle est la surface d'équation $z = r$ en coordonnées cylindriques

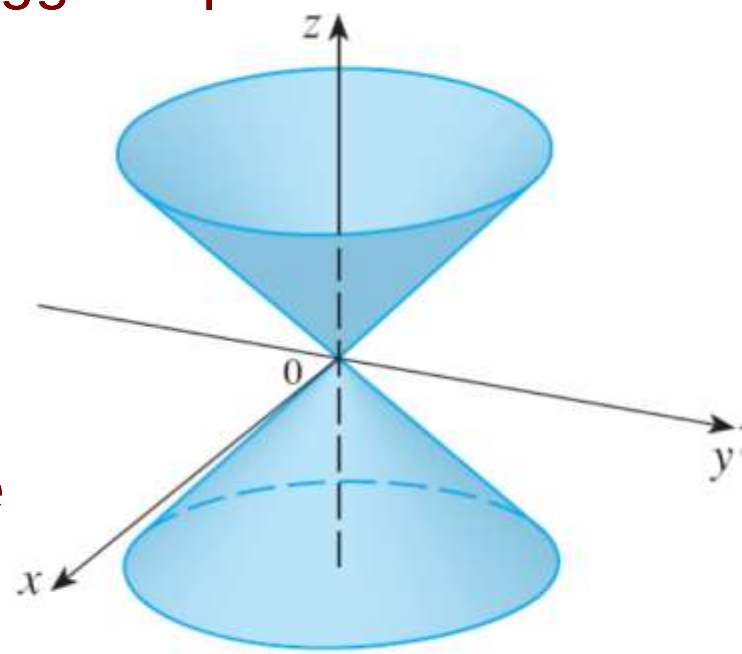
## Solution

- L'équation indique que la valeur de $z$ (hauteur d'un point de la surface) est la même que $r$ (distance de ce point à l'axe $z$).
- Comme $\theta$ n'apparait pas, ça veut dire que la surface est invariante par rotation autours de l'axe $z$.

Donc, toute section horizontale de la surface par un plan $z = k$ ($k > 0$) est a cercle de rayon $k$. Ceci suggère que la surface est un cône d'axe z

- convertissons l'équation en coordonnées rectangulaires.

On a : $z^2 = r^2 = x^2 + y^2$, cette équation ($z^2 = x^2 + y^2$) est l'équation cartésienne du cône circulaire d'axe $z$.



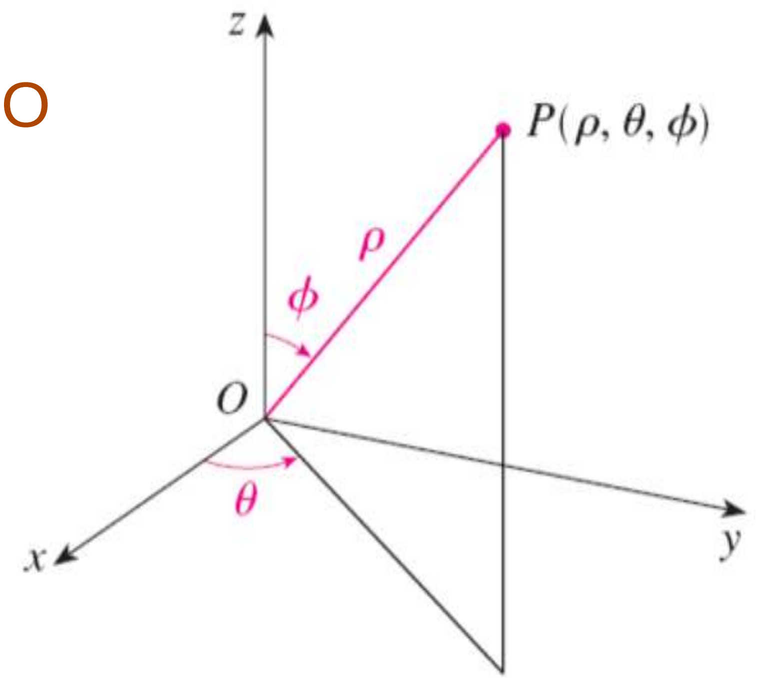
## SYSTÈME DE COORDONNÉES SPHERIQUES (3D)

Le système de coordonnées sphériques est un autre système de coordonées utile en trois dimensions.

- Il simplifie en particulier les calculs d'integrals triples sur des volumes limités par des portions de sphères ou de cônes.

Les coordonnées sphériques ($\rho$, $\theta$, $\Phi$) d'un point *P* de l'espace sont :

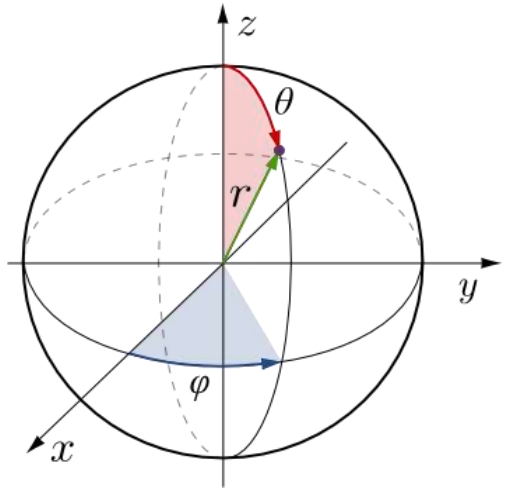
- $\rho$ = |**OP**|, la distance de l'origine O à *P* ($\rho \geq 0$)
- $\theta$, le même angle qu'en coordonnées cylindriques.
- $\Phi$, l'angle entre les vecteurs **z** et **OP**.



## REMARQUE TRÈS IMPORTANTE

**En physique, les notations $\theta$ et $\Phi$ sont Généralement interverties, comme sur la figure ci-contre.**

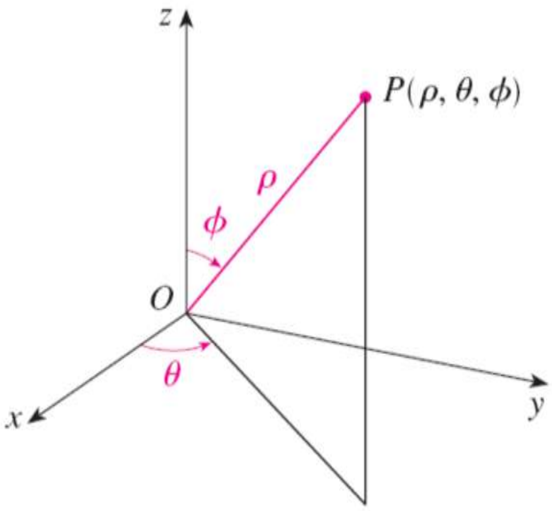
**La distance est souvent notée *r*.**




*Notations « physiques »*

l'angle formé par les vecteurs **z** et **OP** est appelé colatitude (la latitude est l'angle entre le plan équatorial et **OP**).

Notons que la première coordonnée (la distance entre *O* et *P*) est toujours positive, et que la colatitude est comprise entre 0 et $\pi$, l'autre angle varie entre 0 et $2\pi$.




*Notations « mathématiques »*

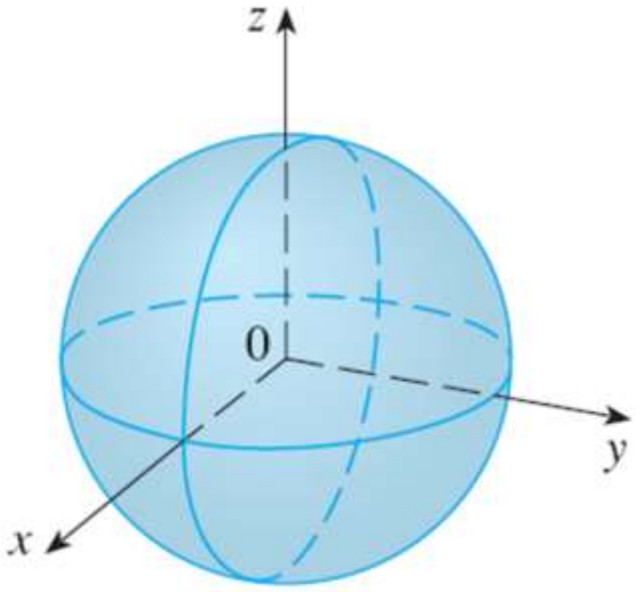
## COORDONNÉES SPHÈRIQUES

Utiliser un système de coordonnées sphériques peut être particulièrement utile pour résoudre des problèmes présentant une symétrie par rapport à un point, qu'on choisit comme origine du système.

Par exemple, la sphère dont le centre sert d'origine et de rayon *c* a alors une équation très simple :

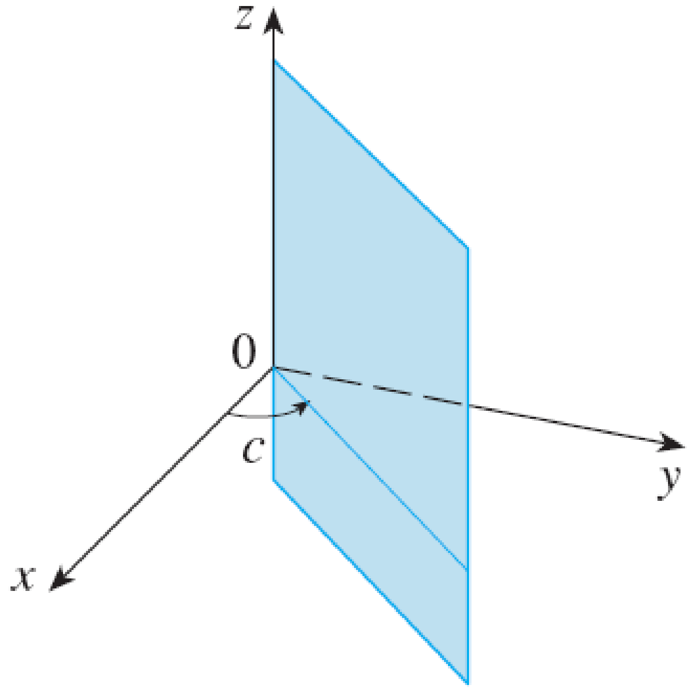
$$\rho = c.$$

Ou $r$ = c en notations "physiques"

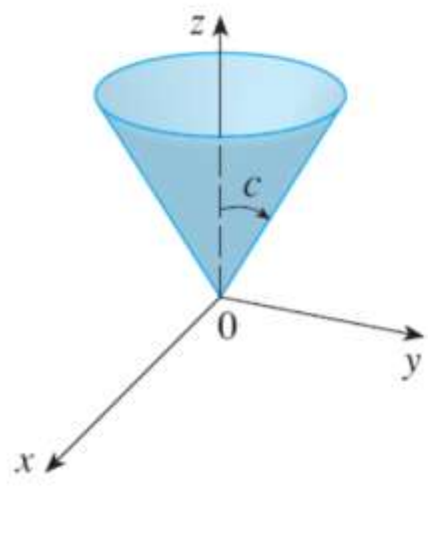


# COORDONNÉES SPHÈRIQUES

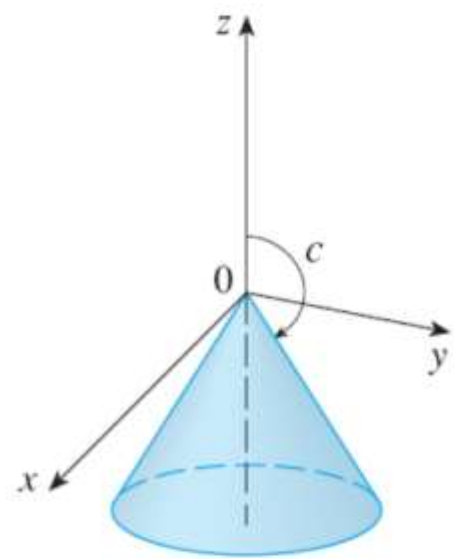
Le graphe d’équation $\theta = c$ ($\varphi = c$ en notations physiques) est un demi plan vertical contenant l’axe Oz.




L’équation $\Phi = c$ ($\theta = c$ en notations physiques) représente un demi-cône d’axe $z$.




$0 < c < \pi/2$




$\pi/2 < c < \pi$

## COORDONNÉES SPHÈRIQUES & CARTÉSIENNES

La relation entre coordonnées cartésiennes and sphériques se déduit de la figure.

Considérons les triangles *OPQ* et *OPP'*, on a :

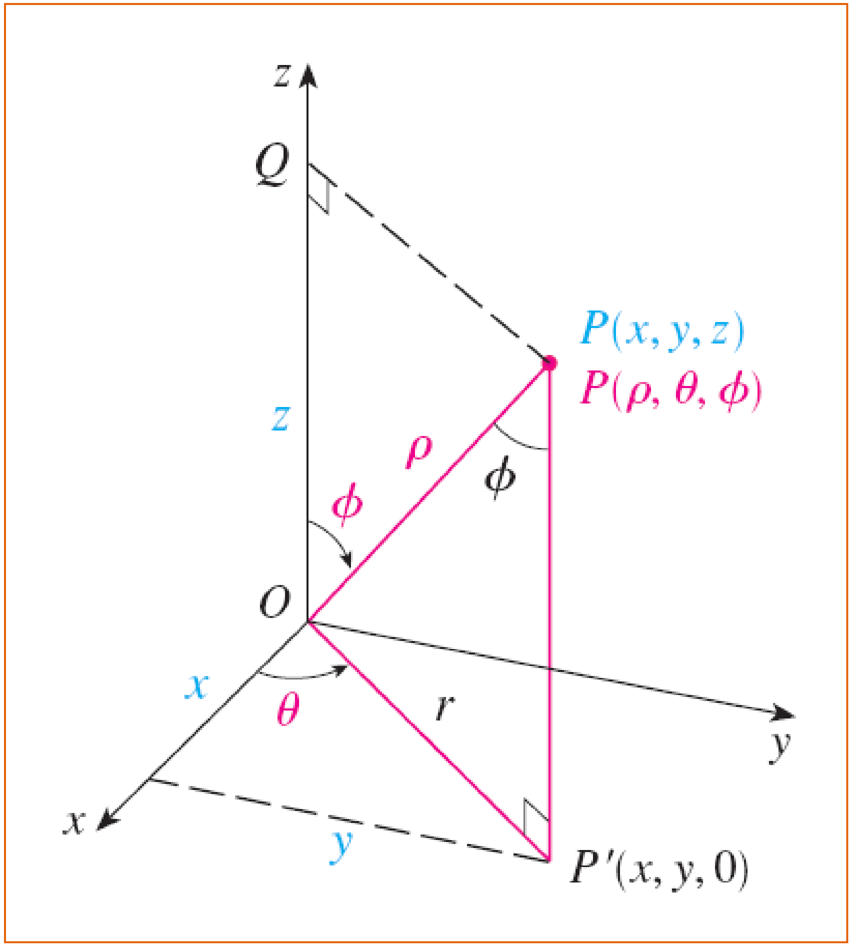
$$z = \rho \cos \Phi,\ r = \rho \sin \Phi$$

- Et comme,

$$x = r \cos \theta,\ y = r \sin \theta$$

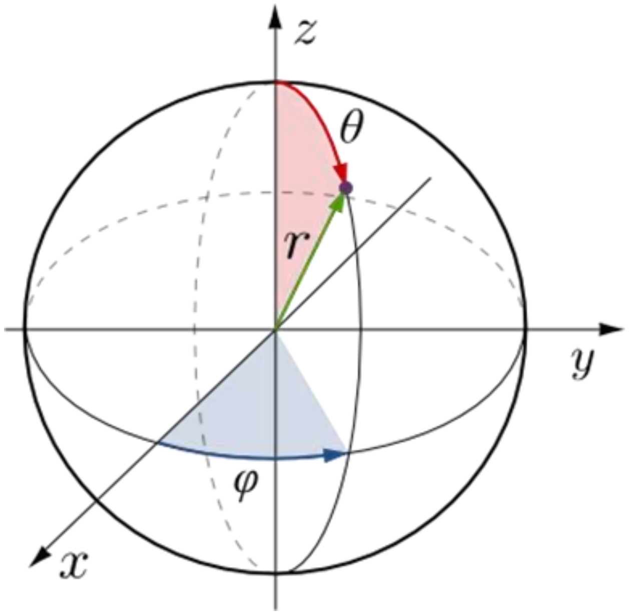
On obtient les formules de conversion :

$$x = \rho \sin \Phi \cos \theta$$
$$y = \rho \sin \Phi \sin \theta$$
$$z = \rho \cos \Phi$$



# COORDONNÉES SPHÈRIQUES & CARTÉSIENNES

Avec les notations physiques, la relation de passage aux coordonnées cartésiennes s'écrit donc :



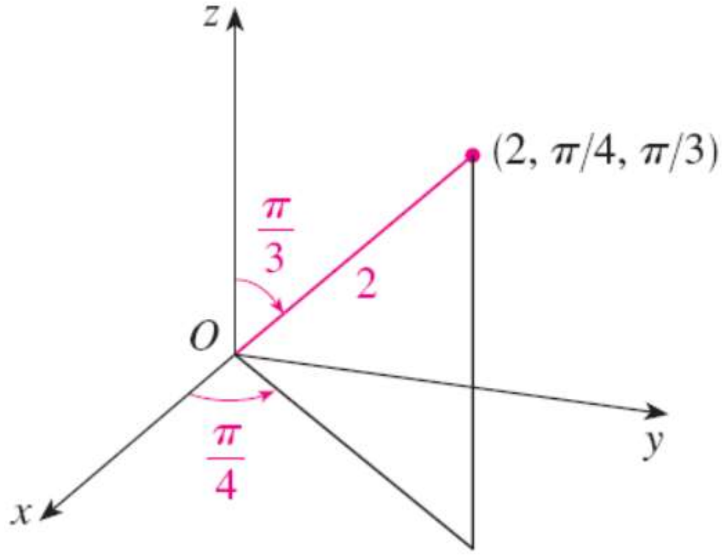

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

Exercice :

Le point ($r$ = 2, $\theta = \pi/3$, $\varphi = \pi/4$) est donné en coordonnées sphériques (avec notations “physiques”). Placer le point sur un schéma et calculer ses cordonnées cartésiennes.

## Solution

.




Coordonnées cartésiennes : $\left(\sqrt{3/2}, \sqrt{3/2}, 1\right)$

$$x = 2\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$y = 2\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$z = 2\cos\frac{\pi}{3} = 2\left(\tfrac{1}{2}\right) = 1$$

# COORDONNÉES SPHÈRIQUES & CARTÉSIENNES

La formule donnant la distance indique que :

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

- On utilise cette équation pour convertir les coordonnées cartésiennes en coordonnées spheriques.

Exercice : Le point $\left(0, 2\sqrt{3}, -2\right)$ est donné en coordonnées cartésiennes.

Caculer des coordonnées sphériques pour ce point.

## Solution

On a :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$= \sqrt{0 + 12 + 4}$$
$$= 4$$

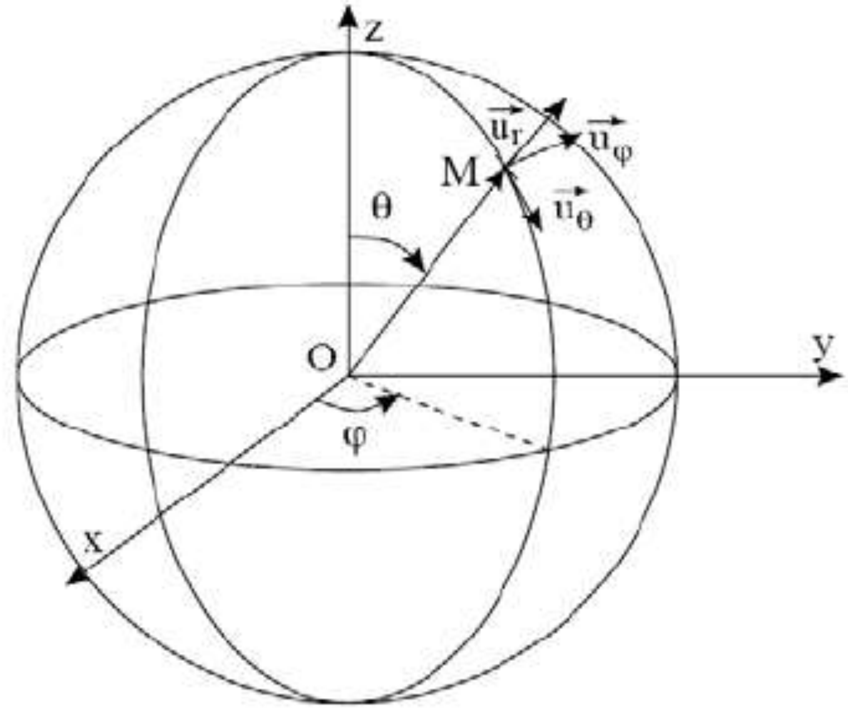
$$\cos\theta = \frac{z}{r} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \quad \text{donc} \quad \theta = \frac{2\pi}{3} \quad (\theta \in [0, \pi])$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{r\sin\theta} = 0, \text{ donc } \varphi = \frac{\pi}{2} \text{ ou } \varphi = \frac{3\pi}{2}$$

Comme y > 0 ($y = 2\sqrt{3}$), $\varphi = \frac{\pi}{2}$

Donc on a : $r = 4$, $\theta = \frac{2\pi}{3}$ (colatitude), $\varphi = \frac{\pi}{2}$

## Repère comobile




Considérons M de coordonnées sphériques ($r$, $\theta$, $\varphi$).

Le vecteur position de *M* est :

$$\mathbf{OM} = r\,\mathbf{u}_r$$

$\mathbf{u}_r$ est le vecteur unitaire radial.

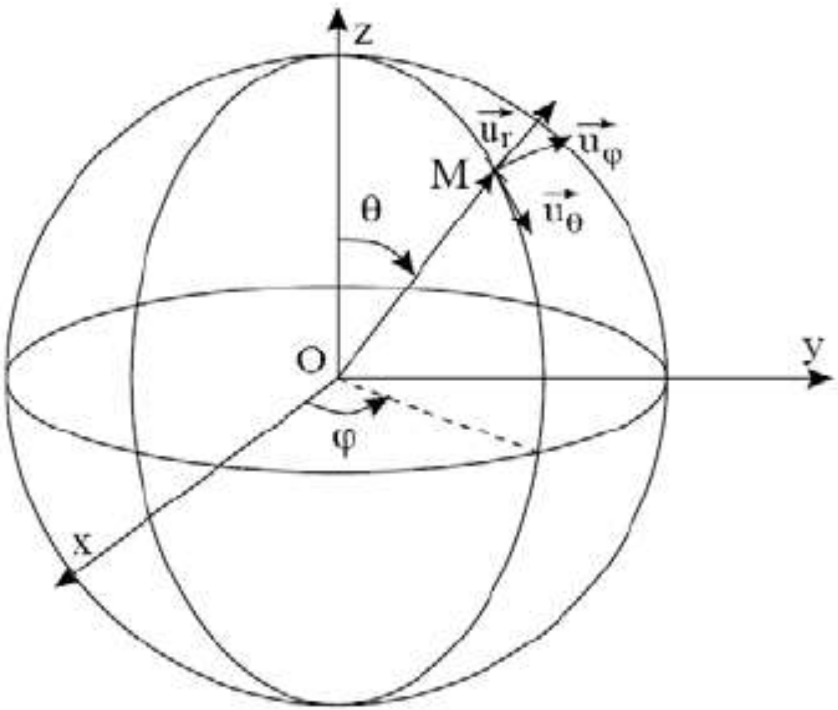
Les coordonnées cartésiennes de *M* sont :

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

On aura donc pour $\mathbf{u}_r$ : $(\sin\theta\cos\varphi\,,\sin\theta\sin\varphi\,,\cos\theta)$

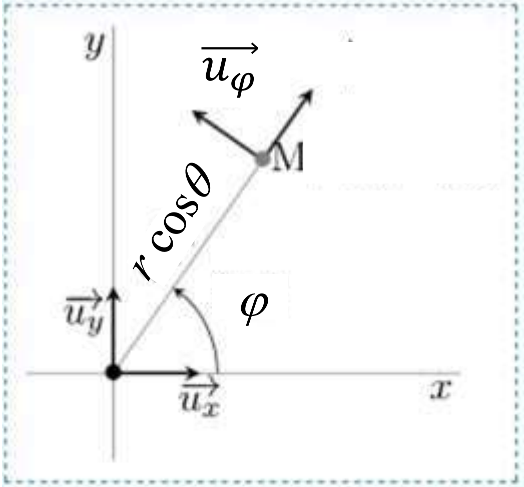
## Repère comobile

Lorsque l'angle $\varphi$ varie le point $M$ décrit un cercle, dans un plan parallèle à (O**xy**), de rayon $r \cos \theta$.




Le vecteur unitaire tangent en $M$ à cette courbe est noté $\mathbf{u}_\varphi$, il est situé dans le plan « horizontal » (**x**,**y**).

On sait aussi qu'il est orthogonal à **OM** (et donc à $\mathbf{u}_r$), puisque la norme de **OM** est constante lorsque $M$ se déplace sur le cercle.

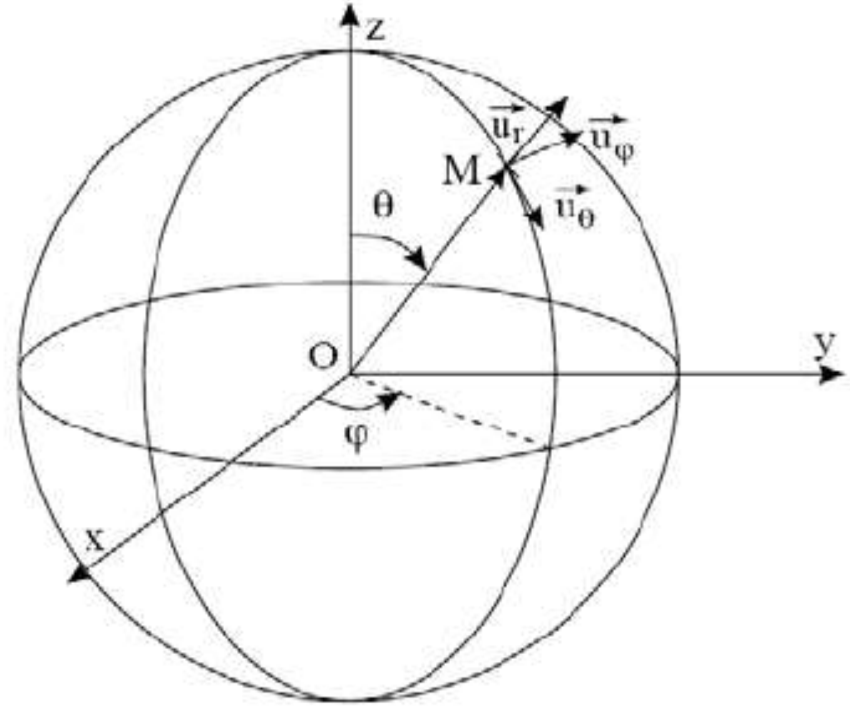



Comme on l'a vu pour le cercle dans un plan, on a :

$$\mathbf{u}_\varphi = -\sin\varphi\, \mathbf{u}_x + \cos\varphi\, \mathbf{u}_y$$

# Repère comobile

- Lorsque l'angle $\theta$ varie le point $M$ décrit un demi grand cercle (méridien).
- Le vecteur unitaire tangent à cette courbe, en $M$, est noté $\mathbf{u}_\theta$.




- Il est orthogonal à $\mathbf{u}_r$ puisque, lorsque $M$ décrit le demi cercle, la norme du vecteur **OM** est constante ($\|\mathbf{OM}\| = r$).
- $\mathbf{u}_\theta$ est dans le plan « méridien », il est donc orthogonal à $\mathbf{u}_\varphi$ qui est dans un plan « horizontal ».
- Le repère comobile ($M$,$\mathbf{u}_r$,$\mathbf{u}_\theta$, $\mathbf{u}_\varphi$) est orthonormé direct et lié à $M$.
- Remarque : on a $\mathbf{u}_\theta = \mathbf{u}_\varphi \times \mathbf{u}_r$, on en déduit les composantes cartésiennes de $\mathbf{u}_\theta$(à vérifier en exercice) :

$$(\cos\theta\cos\varphi,\ \cos\theta\sin\varphi,\ -\sin\theta)$$

## Exercice

- Donner les équations paramétriques de la courbe décrite par le point $M$ de coordonnées sphériques $(r, \theta, \varphi)$ lorsque $\varphi$ varie ($r$ et $\theta$ restant fixés).
- Calculer, par dérivation, le vecteur tangent à la courbe, en déduire les coordonnées cartésiennes de $\mathbf{u}_\varphi$
- Donner les équations paramétriques de la courbe décrite par le point $M$ de coordonnées sphériques $(r, \theta, \varphi)$ lorsque $\theta$ varie ($r$ et $\varphi$ restant fixés).
- Calculer les coordonnées cartésiennes de $\mathbf{u}_\theta$ de deux façons différentes.

## Solution

- Les équations paramétriques sont, bien sûr :

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad \varphi \in [0,2\pi]$$

- On obtient les coordonnées du vecteur tangent $\mathbf{T}\varphi$ par dérivation des coordonnées de $M$ par rapport à $\varphi$ :

$$\frac{d}{d\varphi}(r\sin\theta\cos\varphi) = -r\sin\theta\sin\varphi$$
$$\frac{d}{d\varphi}(r\sin\theta\sin\varphi) = r\sin\theta\cos\varphi$$
$$\frac{d}{d\varphi}(r\cos\theta) = 0$$

$\mathbf{T}_\varphi$ n'est pas unitaire, $\|\mathbf{T}_\varphi\|^2 = r^2\sin^2\theta(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = r^2\sin^2\theta$, $\|\mathbf{T}_\varphi\| = r\sin\theta$ ( $\sin\theta$ est positif car $\theta \in [0,\pi]$). On en déduit les coordonnées de $\mathbf{u}_\varphi = \mathbf{T}_\varphi / \|\mathbf{T}_\varphi\|$ :

$$\mathbf{u}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$$

Les équations paramètiques sont :

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad \theta \in [0,\pi]$$

On obtient les coordonnées du vecteur tangent $\mathbf{T}_\theta$ par dérivation des coordonnées de $M$ par rapport à $\theta$ :

$$\frac{d}{d\theta}(r\sin\theta\cos\varphi) = r\cos\theta\cos\varphi$$
$$\frac{d}{d\theta}(r\sin\theta\sin\varphi) = r\cos\theta\sin\varphi$$
$$\frac{d}{d\theta}(r\cos\theta) = -r\sin\theta$$

$\|\mathbf{T}_\theta\|^2 = r^2\cos^2\theta(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + r^2\sin^2\theta = r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r^2$

Donc $\|\mathbf{T}_\theta\| = r$, les coordonnées cartésiennes de $\mathbf{u}_\theta = \mathbf{T}_\theta / \|\mathbf{T}_\theta\|$ sont :

$$(\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta)$$

- L'autre méthode, déjà indiquée, consiste à faire le produit vectoriel :

$$\mathbf{u}_\theta = \mathbf{u}_\varphi \times \mathbf{u}_r = \begin{bmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_\theta = \begin{bmatrix} -\cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta \end{bmatrix}$$

*Remarque* : comme on le voit sur les coordonnées de $\mathbf{u}_r$, $\mathbf{u}_r$ est une fonction des deux variables $\theta$ et phi.

Nous aborderons en détail l'étude des fonctions de plusieurs variables au chapitre suivant.

On peut déjà observer que les calculs précédents montrent que le vecteur dérivé de $\mathbf{u}_r$ par rapport à $\theta$ (à $\varphi$ fixé) est $\mathbf{u}_\theta$, et que le vecteur dérivé de $\mathbf{u}_r$ par rapport à $\varphi$ (à $\theta$ fixé) est $\sin\theta\,\mathbf{u}_\varphi$.